

آیا ریاضیات می‌تواند آینده را پیش‌بینی کند؟

قسمت اول: مدل‌های ریاضی، شبیه‌سازی‌ها

علیرضا خاتون آبادی

دکترای ریاضی و مدرس ریاضی در دانشگاه و مؤسسات

ونکوور کانادا



تروریست پایان یافت، هرچند کشورش به پیشرفت ادامه داد. آیا می‌توانست استفاده از ریاضیات، سرنوشت او را تغییر دهد؟ این پرسش ممکن است پوچ به نظر برسد، اما ابزارهای ریاضی برای «پیش‌بینی» مدت‌هاست که در رفتار و تلاش‌های انسانی به‌کار رفته‌اند، از سیاست گرفته تا پیش‌بینی وضعیت آب و هوا و معاملات بورسی.

در سال ۱۸۶۵، هنگامی که جنگ داخلی آمریکا رو به پایان بود، آبراهام لینکلن برای دومین بار در مقام ریاست‌جمهوری ایالات متحده سوگند یاد کرد. او در سخنرانی آغازین خود از «امیدهای والا برای آینده» سخن گفت، اما با احتیاط هشدار داد که «هیچ پیش‌بینی در این مورد نمی‌توان کرد». در نهایت، تنها اندکی پس از آن، زندگی شخصی لینکلن با گلوله یک

اعتماد نکنیم، اما با اطمینان می‌توان گفت که خورشید گرفتگی ۲۱ اوت ۲۰۱۷ طبق پیش‌بینی رخ خواهد داد.

مدل‌سازی زندگی

مدل ریاضی، راهی برای توصیف یک موقعیت واقعی با زبان ریاضی است؛ یعنی تبدیل آن به متغیرها و معادلات. با فرض اینکه برخی عوامل مهم‌تر از بقیه‌اند، مدل سعی می‌کند «اصل» یک وضعیت را ثبت کند. مکانیزمی طراحی می‌شود و سپس با دقت بررسی

ما ممکن است با تمسخر به این ایده نگاه کنیم که می‌توان با استفاده از ریاضیات آینده را پیش‌بینی کرد، گویی معادلات و نمادها به گوی‌های پیش‌گویی تبدیل می‌شوند. بحران مالی جهانی که در سال ۲۰۰۸ رخ داد، ضربه سختی به این ادعا زد و نتیجه‌ای مرگبار از غرور ریاضی‌مدارانه بود. سال‌ها، مؤسسات مالی ریاضی‌دانانی را برای پیش‌بینی تحولات، استخدام می‌کردند که آن‌ها را «کوانت» می‌نامیدند. به‌زعم منتقدان، همین مدل‌های پیچیده ریاضی



می‌شود تا مشخص شود تا چه حد این مدل بازتابی از واقعیت است. در گذشته، مدل‌های ریاضی، بیشتر در فیزیک کاربرد داشتند. نظریه گرانش نیوتن که حرکت سیارات را مدل‌سازی می‌کند و معادلات ماکسول (که تعامل الکترومغناطیس را توضیح می‌دهند)، از نمونه‌های اصلی هستند. اما امروزه دامنه وسیعی از علوم برای مدل‌سازی به‌کار

مبتنی بر احتمال و آمار، عامل فروپاشی مالی بی‌سابقه‌ای بودند. اما نباید همه‌ی دستاورد را کلاً از بین برد! اشتباه است که ریسک بیش‌ازحد سیستم بانکی را به کل مدل‌سازی ریاضی نسبت دهیم. سال‌هاست که مدل‌سازی به شیوه‌های بسیار دقیق‌تر و قابل اعتمادتر ادامه داشته‌است. شاید دیگر هیچ‌گاه به پیش‌بینی‌های مالی

انسان در مقایسه با حرکت سیارات دارد. اما داده‌های عددی وجود دارند، و تحلیل‌گران می‌کوشند با روش‌های آماری و فرمول‌نویسی، روندهای پنهان را آشکار کنند.

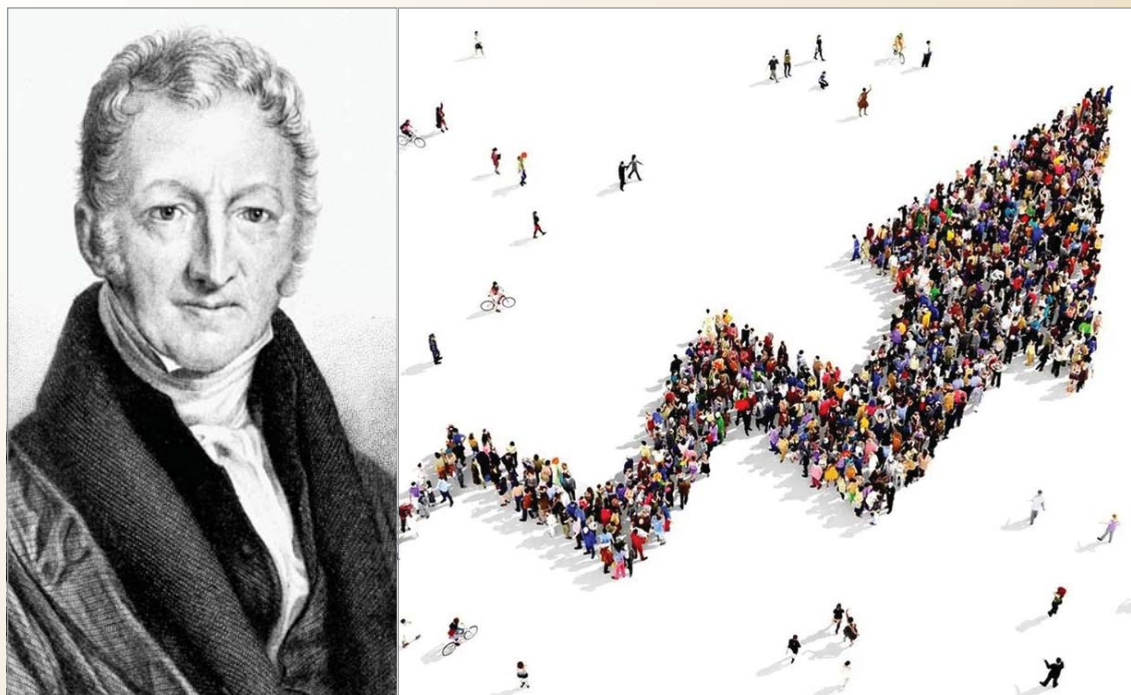
اکنون، با قدرت روزافزون رایانه‌ها، کل این عرصه گسترش یافته‌است. با این حال، همچنان مسئله مهم این است که مدل‌ها تا چه حد با واقعیت تطابق دارند.

مدل‌سازی جمعیت‌ها

پرسش از این‌که یک مدل «تا چه حد» خوب است، پرسشی اساسی اما دشوار است؛ چون ذات مدل‌سازی بر پیش‌بینی متکی است، نتایج نهایی ممکن است تنها زمانی معلوم شوند که رویدادهای واقعی رخ دهند. مطالعات جمعیت‌شناسی نمونه‌ای عالی از حوزه‌ای است که در آن تکنیک‌های نوین، امکان پیش‌بینی‌های دقیق‌تری را فراهم کرده‌اند.

گرفته می‌شوند: جمعیت‌شناسی، اقتصاد، جغرافیا، روان‌شناسی، زیست‌شناسی، پزشکی، مهندسی و فراتر از آن. برای مثال، رشد شهرها و جمعیت‌ها تحت ذره‌بین ریاضی قرار گرفته و گسترش بیماری‌ها در بدن بیماران نیز با مدل‌های ریاضی بررسی می‌شود. به قول نیلز بور پیش‌بینی بسیار دشوار است مخصوصاً اگر مربوط به آینده باشد.

با توجه به تنوع فراوان مدل‌سازی، تعجبی ندارد که مجموعه‌ای گسترده از تکنیک‌های پیچیده ریاضی پدید آمده‌اند-مانند احتمال، آمار، نظریه مجموعه‌ها و روش‌های بهینه‌سازی. در دنیای نسبیت، نظریه گرانش نیوتن ممکن است «تقریبی» باشد، اما همچنان برای پیش‌بینی خسوف‌ها و کسوف‌ها کفایت می‌کند. در بازارهای مالی، نظریه روشنی وجود ندارد که شاید نشان از دشواری ذاتی در پیش‌بینی رفتار



در قرن نوزدهم، کشیش توماس مالتوس مدل ریاضی مشهوری برای رشد جمعیت ارائه داد که در رساله‌ای با عنوان «مقاله‌ای درباره اصل جمعیت» منتشر شد. در آن، به این نتیجه بدبینانه رسید که افزایش جمعیت، ظرفیت زمین برای تولید غذا را پشت سر خواهد گذاشت و اگر بیماری‌ها، طاعون و اپیدمی‌ها باعث مرگ گسترده مردم نشوند، قحطی‌های عظیم این وظیفه را به‌عهده خواهند گرفت. از نظر مدل‌سازی، نظریه مالتوس فرض می‌کرد که جمعیت هر ۲۵ سال دو برابر می‌شود. مثلاً اگر جمعیت در ابتدا N باشد، پس از ۲۵ سال می‌شود $N \times 2$ و پس از ۲۵ سال دیگر می‌شود $N \times 4$ بنابراین فرآیند رشد جمعیت به‌صورت زیر است:

1,2,4,8,16,32,...

حالا فرض کنیم که در ابتدا به‌اندازه کافی غذا (F) برای جمعیت وجود دارد. مالتوس استدلال کرد که غیرممکن است تولید غذا با همان سرعت جمعیت افزایش یابد، چرا که زمین قابلیت کشت محدود دارد. بنابراین، او فرض کرد که هر ۲۵ سال یک واحد F به غذا اضافه می‌شود. پس از ۲۵ سال اول، مقدار غذا برابر خواهد بود با:

$$F+F=2 \times F$$

و پس از ۵۰ سال:

$$F+F+F=3 \times F$$

و الی آخر.

پس رشد غذا طبق این نظریه به‌صورت زیر خواهد بود:

1,2,3,4,5,6, ...

رشد جمعیت از نوع تصاعد هندسی

است (هر بار ضرب در ۲)، در حالی که رشد غذا از نوع تصاعد عددی است (هر بار جمع‌کردن ۱). مالتوس نتیجه‌گرفت که در آینده، غذای کافی برای جمعیت فزاینده وجود نخواهد داشت.

مدل مالتوس در زمان خود بسیار تأثیرگذار بود، اما با نگاه امروز می‌توان آن را نادرست دانست. اگر بخواهیم با مدل او، مثلاً جمعیت فعلی بریتانیا را پیش‌بینی کنیم، به نتایج عجیبی می‌رسیم. از جمعیت ۱۰ میلیونی بریتانیا در حوالی سال ۱۸۰۰ (زمانی که مالتوس می‌نوشت)، او پیش‌بینی می‌کرد که جمعیت در سال ۲۰۰۰ به حدود ۲۵۶ میلیون نفر برسد یعنی بیش از ۴ برابر رقم واقعی.

البته باید انصاف داد که مالتوس نمی‌توانست عواملی مثل کنترل جمعیت، مهاجرت و پیشرفت‌های فناوری غذایی را پیش‌بینی کند. اما مدل مالتوسی بی‌فایده نبود، بلکه باعث شد نظریه‌های پیشرفته‌تری توسعه یابد، که در آن‌ها فرضیات بهتر و مدل اولیه اصلاح شد. امروزه حتی می‌توان نرخ رشد جمعیت را کاهنده در نظر گرفت، چرا که با افزایش سطح رفاه، نرخ رشد کاهش می‌یابد.

پیش‌بینی و محدودیت‌های آن

در بسیاری از جنبه‌های زندگی روزمره، میل شدید ما برای دانستن آینده با ناپایداری شدید پدیده‌ها روبه‌رو می‌شود. جابجایی پول یا وضعیت آب‌وهوا از نمونه‌هایی هستند که مدل‌سازی، هرچند دقیق، در آن‌ها با محدودیت‌هایی مواجه است. در دنیای مالی، پیش‌بینی بازار سهام،



قیمت‌های سه روز گذشته نگاه کرد. مثلاً اگر قیمت‌ها در روزهای دوشنبه، سه‌شنبه و چهارشنبه به ترتیب ۳۷۰۰، ۳۹۰۰ و ۴۱۰۰ باشند، می‌توان میانگین آن‌ها را گرفت تا پیش‌بینی برای پنج‌شنبه را انجام داد:

$$\frac{۳۷۰۰+۳۹۰۰+۴۱۰۰}{۳} = \frac{۱۱۷۰۰}{۳} = ۳۹۰۰$$

این روش را «روش میانگین متحرک ساده» می‌نامند، چون وقتی قیمت پنج‌شنبه به دست آمد، عدد دوشنبه کنار گذاشته می‌شود و میانگین سه‌روز سه‌شنبه، چهارشنبه و پنج‌شنبه برای پیش‌بینی جمعه به کار می‌رود.

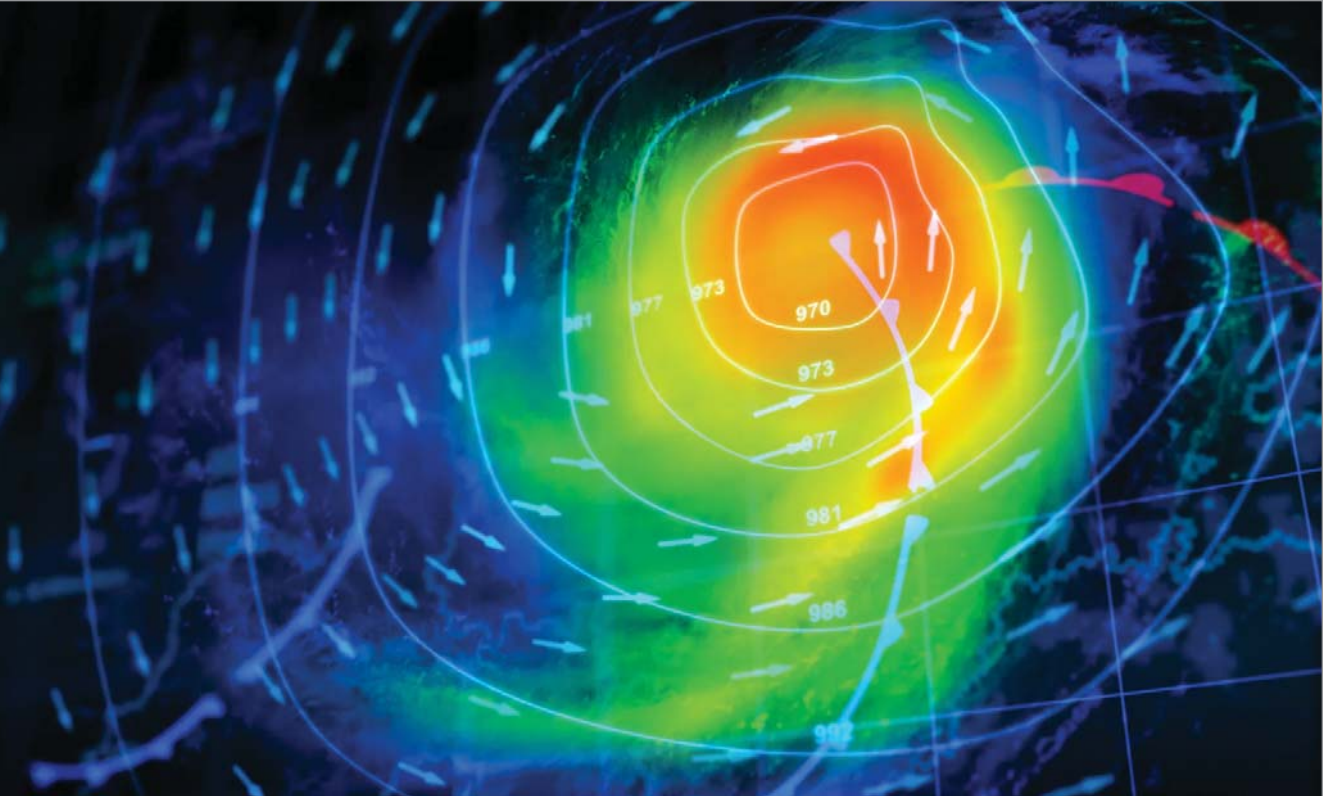
در بازاری که روند صعودی دارد، این نوع میانگین همیشه مقداری پایین‌تر از مقدار واقعی خواهد بود.

نمودار، کاهشی را نشان می‌دهد و ممکن است توسط معامله‌گرانی که احساس می‌کنند این نمودار شرایط حاکم را منعکس نمی‌کند، کنار گذاشته شود. برای جبران نسبی این موضوع، می‌توان وزن بیشتری به داده‌های بسیار تازه نسبت به داده‌های چند روز گذشته داد تا روند بهتری منعکس شود. روش وزن‌دهی به روزها، خود موضوعی قضاوتی است و شاخص‌های مختلف مدل‌های متفاوتی را منعکس می‌کنند. در زندگی واقعی، البته معامله‌گران دانش تخصصی در مورد مجموعه‌ای خاص از شرکت‌ها دارند که در پیش‌بینی کلی وارد می‌کنند. با این حال، هیچ مدل پیش‌بینی‌ای به خودی خود نمی‌تواند سقوط بازار سهام را پیش‌بینی کند.



بخش بزرگی از زمان سرمایه‌گذاران را به خود اختصاص داده‌است. شاخص‌هایی مثل داو جونز، FTSE 100، نیکئی (Nikkei) برپایه میانگین قیمت سهام چندین شرکت شکل می‌گیرند. پیش‌بینی عدد شاخص برای روز بعد می‌تواند به معنای سود یا ضرر باشد. یکی از دشواری‌ها این است که بازارهای مالی به شدت تحت تأثیر مفهوم انتزاعی اعتماد هستند - پیش‌بینی واکنش‌های انسانی به پدیده‌ها که گاهی ربط مستقیمی به اقتصاد ندارند - اما اثر زیادی دارند.

نقطه شروع در مدل‌سازی، مانند همیشه، داده‌های تاریخی است. اما مهم این است که چگونه این داده‌ها تفسیر می‌شوند. در یک مدل ساده برای پیش‌بینی قیمت سهام، می‌توان به



تا چنین شرایطی را با روش شبیه‌سازی بررسی کنند.

شبیه‌سازی به معنای آزمایش با یک مدل ریاضی و انجام مشاهدات است. چگونه می‌توانیم تعداد صندوق‌های فروشگاه‌های زنجیره‌ای را که در ساعات مختلف روز نیاز به فعالیت دارند پیش‌بینی کنیم؟ چگونه باید هواپیماها در شرایط آب‌وهوایی مختلف در بالای یک فرودگاه قرار گیرند؟ اینها انواع سؤالاتی هستند که با شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرند. با تغییر پارامترهای مدل - در مورد فروشگاه‌ها بر اساس ساعات روز؛ در مورد هواپیماها با «تغییر» شرایط آب‌وهوایی - آزمایشگر ریاضی می‌تواند «ببیند» که در موقعیت‌های مختلف چه اتفاقی می‌افتد، حتی اگر راه‌حل دقیقی نداشته باشد. این روش کامل نیست، اما پیشرفتی قطعی نسبت به حدس‌زنی و بداهه‌پردازی است که در مورد هواپیماهای در حال انتظار می‌تواند فاجعه‌بار باشد!

پیش‌بینی آب‌وهوا نیز همچنان یک علم غیردقیق است. پیش‌بینی‌هایی با هر درجه از دقت تنها به چند روز آینده محدود می‌شوند و حتی در آن صورت نیز در معرض تغییرات لحظه‌آخری هستند زیرا رویدادهای واقعی unfold می‌شوند. مشکل اینجاست که معادلات ناویر-استوکس که گردش جو و اقیانوس‌ها و در نتیجه آب‌وهوا را مدل‌سازی می‌کنند، در حال حاضر غیرقابل حل دقیق هستند. ما مجبوریم به راه‌حل‌های تقریبی تکیه کنیم، اما این راه‌حل‌ها پیچیده هستند و شامل تعداد زیادی محاسبات کامپیوتری می‌شوند.

در خارج از حوزه پیش‌بینی آب‌وهوا، حتی یک موقعیت ساده روزمره مانند سرعت تشکیل یک صف، معادلاتی را ایجاد می‌کند که در قالب یک فرمول بیان می‌شوند. حتی ممکن است یک راه‌حل، به دلیل فرضیاتی که باید در ابتدای مدل‌سازی انجام‌شود، تنها برای یک موقعیت ایده‌آل در نظر گرفته‌شود. با این وجود، ریاضیدانان تلاش کرده‌اند