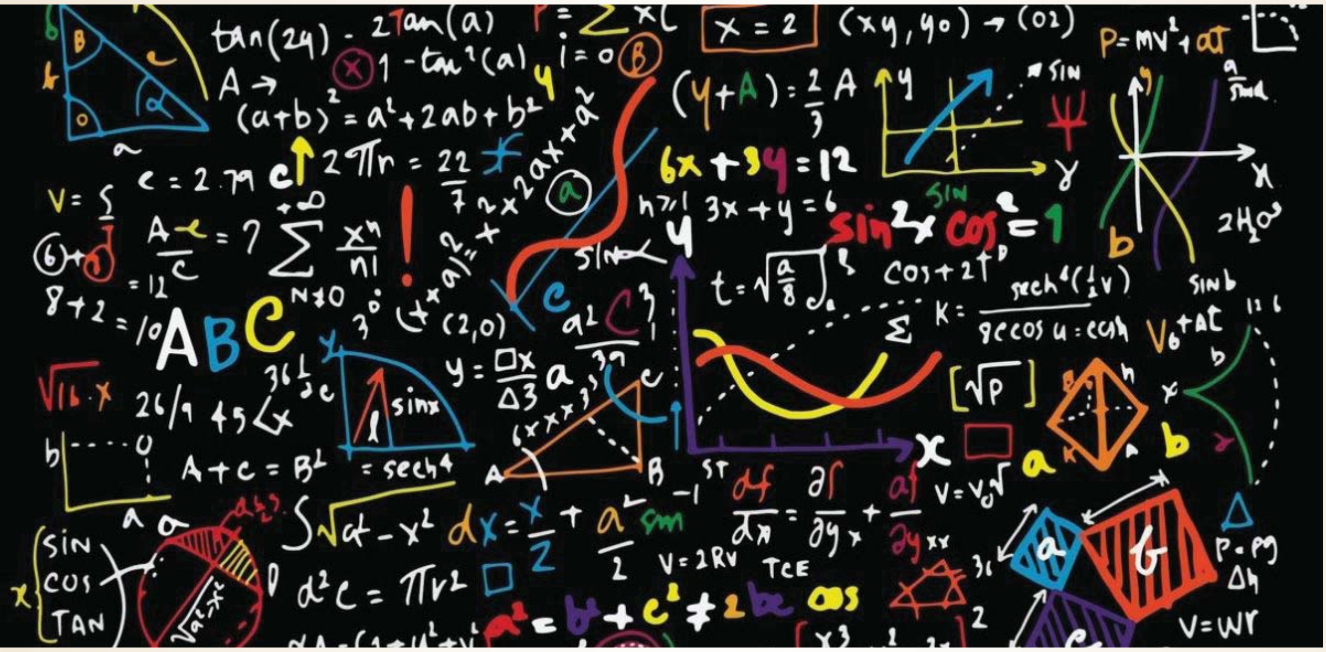
آیا چیزی برای حل باقی مانده‌است؟

مسائل بزرگ حل‌نشده و آینده ریاضیات

علیرضا خاتون آبادی

دکترای ریاضی و مدرس ریاضی در دانشگاه و مؤسسات

ونکوور کانادا



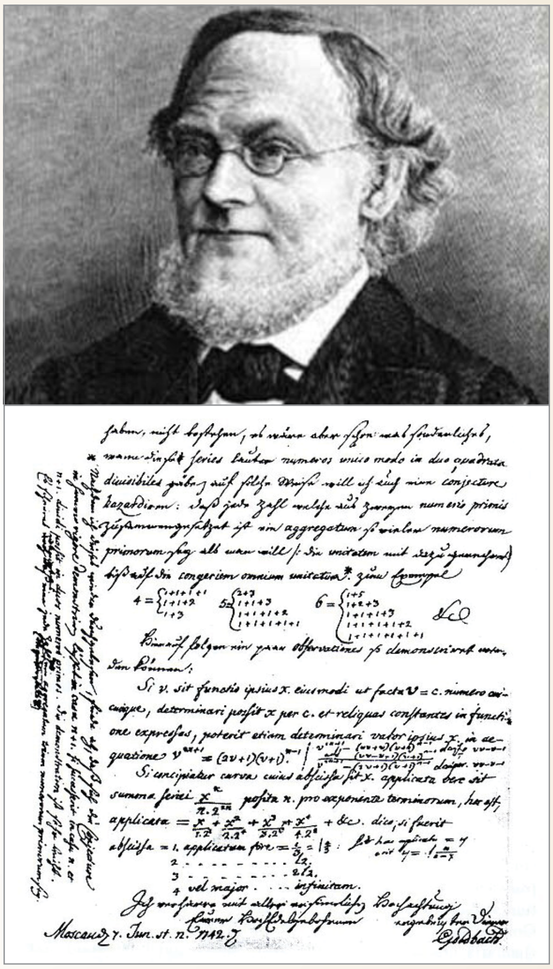
پاسخ‌های بریده‌شده‌ای که در دفتر تمرین یک دانش‌آموز، تیک یا ضربدر دریافت می‌کنند، ممکن است نشان‌دهد که ریاضیات محدود و ثابت است، که این البته خیلی دور از واقعیت است. برخی از معماهای معروف، همچنان گیج‌کننده و جذاب باقی مانده‌اند و نسل حال حاضر را دچار سردرگمی و ناامیدی کرده‌است. هر مسئله‌ای که حل می‌شود به‌طور بالقوه صدها مسئله دیگر را ایجاد می‌کند و ریاضیات را به شکل یک موجود زنده و همیشه در حال تغییر نگاه می‌دارد.

به نوعی، ریاضیات در مسائل حل‌نشده رشد می‌کند و بسیاری از آنها همچنان حل‌نشده باقی می‌ماند. برخی از آن‌ها قرن‌هاست که وجود داشته‌اند؛ اما نظریه‌های تازه در حال ظهور، چالش‌های جدیدی را مطرح می‌کنند. ریاضیدانان به‌طور دوره‌ای «فهرست جدید» از مسائل کلیدی حل‌نشده را تهیه می‌کنند که معروف‌ترین نمونه آن «بیست و سه مسئله» دیوید هیلبرت است که در سال

۱۹۰۰ به‌عنوان چالشی برای ریاضی‌دانان قرن جدید منتشر شد. برخی از این چالش‌ها مسائل خاص بودند، در حالی که برخی دیگر پروژه‌های پایان باز بودند. اما با توجه به جایگاه بالای هیلبرت در دنیای ریاضی، این مسائل توجه زیادی را به خود جلب کردند و تمامی بیست و سه کار، چشم‌انداز ریاضی را بیش از یک قرن و بیشتر روشن کرده‌اند. مسائل هیلبرت، کانونی برای فعالیت جمعی بهترین ریاضیدانان جهان را فراهم‌کرد. با ایجاد انگیزه، برخی از جوایز قابل توجه برای ریاضیدانانی که قادر به اثبات یا راه حل مسائل دشوار انتخاب شده بودند، در نظر گرفته شد. یکی از اولین‌ها Wolfs Kehl بود.

جایزه یکصدهزار مارکی که توسط سرمایه‌دار آلمانی پل ولفس‌کهل برای اولین اثبات معتبر آخرین *قضیه فرما* باقی مانده‌است. این قضیه‌ی خاص، سرانجام در سال ۱۹۹۴ توسط سر اندرو وایلز ثابت شد. شاید شناخته‌شده‌ترین جوایز در جهان انگلیسی‌زبان، جوایزی باشد که توسط موسسه Clay، یک بنیاد خصوصی که به گسترش دانش ریاضی اختصاص دارد، ارائه می‌شود. پیشنهاد یک میلیون دلار برای پیشرفت در هر یک از هفت حوزه است که برای پیشرفت ریاضیات در قرن بیست و یک مهم ارزیابی شده‌است. از میان این چالش‌ها، حدس پوانکاره، در مورد توپولوژی اجرام هندسی است، که اکنون به اثبات رسیده‌است. از میان معماها و سوالات باقی‌مانده در حال حاضر چندین مسئله هست که به فراخور زمینه کار، هر ریاضیدان موضوع مورد علاقه خود را انتخاب می‌کند. اما یک اجماع کلی در مورد چندتا از آنها وجود دارد و آن گروه شامل **حدس گلدباخ، فرضیه ریمان، معادلات ناویر-استوکس و P = NP** است. آن‌ها به نوبه خود ارزش بررسی را دارند.

حدس گلدباخ



حدس گلدباخ در اواسط قرن هجدهم شکل‌گرفت و به نام کریستین گلدباخ نام‌گذاری شد. در فهرست هیلبرت به‌عنوان یک مسئله‌ی جدی بیان‌شده که در برابر تمام تلاش‌ها برای اثبات، همچنان حل‌نشده پابرجا مانده‌است. نظریه اعداد، هسته اصلی کل ریاضیات است و برخی از دشوارترین مسائل را هم ایجاد می‌کند که حدس گلدباخ یکی

از مهمتریـن آن‌هـا اسـت. مسـائل تئـوری اعـداد این خصوصیـت خـوب را دارنـد کـه بیـان آن‌هـا آسـان؛ امـا متاسـفانه اثبـات آن‌هـا گاهـی بسـیار دشـوار اسـت.

هماننـد بسـیاری از مسـائل از ایـن نـوع، حـدس گلدبـاخ شـامل نمایـش اعـداد به‌عنـوان مجمـوع اعـداد اول اسـت:

هـر عـدد حسـابی زوج بزرگتـر یا مسـاوی ۴ را می‌تـوان به‌صورت جمـع دو عدد اول نوشـت.

بـرای آزمایـش آن، می‌توانیـم یـک عـدد زوج را به‌طـور تصادفـی انتخـاب کنیـم، مثـلاً ۴۰۷,۳۰۸ و آن را تأییـد کنیـم. در واقـع متوجه می‌شـویم کـه ۴۰۷,۳۰۸ مجمـوع دو عـدد اول اسـت: ۱۷ + ۴۰۷,۲۹۱. هنـوز کسـی نتوانسـته اسـت اسـتثنایی بـرای حـدس گلدبـاخ بیابد، امـا هیچ‌کـس نیـز موفـق بـه اثبـات آن نشده‌اسـت، بنابرایـن به‌عنـوان یـک حـدس اثبـات نشـده باقـی مانده‌اسـت.

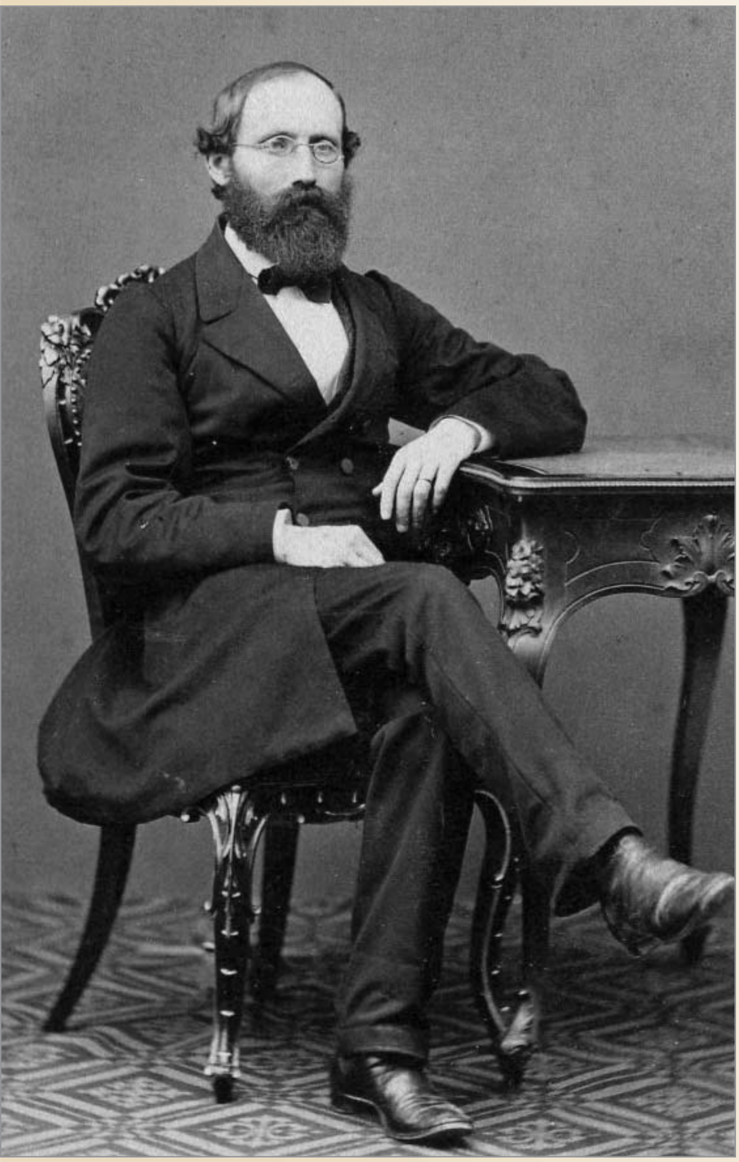
نتایـج عـددی نشـان داده‌اسـت کـه این بـرای همـه اعـداد تـا ۱۰ به‌تـوان ۱۸ صـادق اسـت، بنابرایـن هیـچ شانسـی بـه جهـت یافتـن اسـتثنا و مثـال نقـض در میـان اعـداد کوچکتـر از آن وجـود نـدارد.

فرضیه ریمان

حـدس گلدبـاخ یـک چالـش جـدی در ریاضیـات اسـت. فرضیـه مشـهور ریمـان دارای یـک وزن ریاضـی واقعـی اسـت. ایـن، هشـتمین مسـئله در فهرسـت هیلبـرت، جذاب‌تریـن حـدس و نظریـه در تمـام ریاضیـات اسـت و شـهرت در انتظـار هـر کسـی اسـت کـه موفـق شـود آن را حـل کنـد البتـه بـه همـراه دریافـت یـک میلیـون دلار ارزشـمند. بسـیاری از نتایـج در نظریـه اعـداد بـه اثبـات آن بسـتگی دارد و محققـان ریاضی توجـه خاصـی بـه ایـن مسـئله دارنـد.

فرضیـه ریمـان را می‌تـوان بـر اسـاس آنچـه به‌عنـوان تابـع زتـای ریمـان شـناخته می‌شـود، صورت‌بنـدی کـرد. ایـن فرضیـه بـا برنهـارد ریمـان در اواسـط قـرن نوزدهـم عرضه‌کـرد و نـام آن از ششـمین حـرف (زتـا) الفبـای یونانـی گرفتـه شـده اسـت. تابـع به‌صـورت زیـر بیـان می‌شـود:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$



می‌توان آن را با انتخاب مقدار s محاسبه کرد، بنابراین برای s=۲، مقدار تابع به‌صورت:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

است. به نظر می‌رسد دلیلی وجود ندارد که چرا این سری باید با عدد پی مرتبط شود، اما یک نتیجه معروف لئونارد اویلر این است که مقدار تابع زتای ۲ ؛ $\frac{\pi^2}{6}$ است.

یکی از قابل توجه‌ترین موارد در مورد تابع زتای ریمان، ارتباط آن با اعداد اول است. اویلر کشف‌کرد که تابع برابر است با ضرب تمام اعداد به فرم

$$\frac{p^s}{p^s - 1}$$

که در آن p یک عدد اول است. بنابراین، برای مثال:

$$\zeta(2) = \frac{2^s}{2^s - 1} \times \frac{3^s}{3^s - 1} \times \frac{5^s}{5^s - 1} \times \ldots =$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \ldots$$

ریمان در مقاله معروف خود در سال ۱۸۵۹ «درباره تعداد اعداد اول کمتر از قدر معین»، احتمال عدد مختلط بودن s یعنی یک عدد دو بعدی را معرفی‌کرد. یک عدد مختلط به شکل a+bi (برای اعداد a، b است؛ i موهومی) است؛ و ریمان تصمیم گرفت آن‌ها را به کمک تابع زتای صفر بیابد. سه مقدار اول تقریباً عبارتند از:

$$\frac{1}{2} + 14i, \quad \frac{1}{2} + 21i, \quad \frac{1}{2} + 25i$$

تعداد نامتناهی از این مقادیر وجود دارد، اما آنهایی که محاسبه شده‌اند -هزاران میلیون- همگی دارای ۱/۲ به‌عنوان بخش اول هستند. فرضیه ریمان این است که این ویژگی برای همه مقادیر صادق است. تا کنون ثابت شده‌است که تعداد نامتناهی از این مقادیر دارای این ویژگی است. مسئله این است که، به‌طور منطقی، این احتمال وجود دارد که تعداد نامحدودی از این جواب‌ها دارای این ویژگی نباشند. ریمان نشان‌داد که این حدس به نحوه توزیع اعداد اول در امتداد خط اعداد حقیقی مرتبط است. اعداد اول درصد عدد اول متراکم هستند، اما در گستره طولانی خط اعداد شکاف‌های بزرگی بین برخی از اعداد اول وجود دارد. حدس ریمان، کلید دانستن جزئیات دقیق این توزیع اعداد اول بر روی محور اعداد حقیقی است.

معادلات ناویر - استوکس

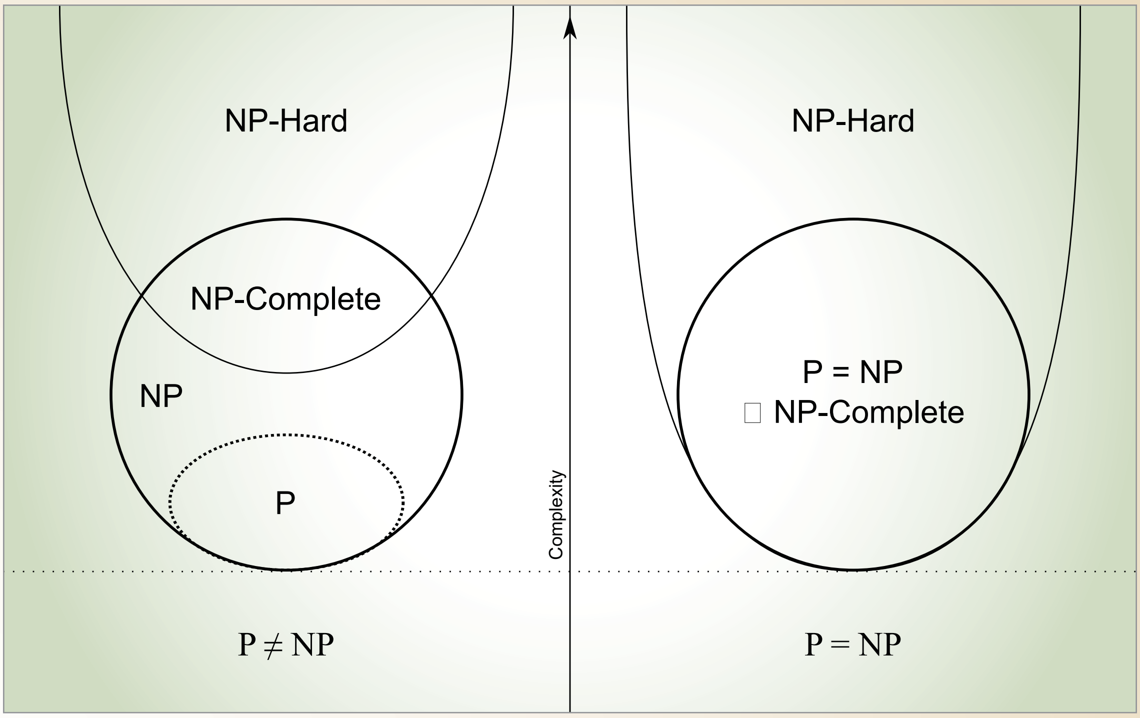
وقتی با هواپیما پرواز می‌کنیم یا با کشتی‌ها حرکت می‌کنیم، ممکن است به اندازه کافی بدشانس باشیم که تلاطم هوا یا آب را تجربه کنیم. آب و هوا هر دو به‌عنوان سیال طبقه‌بندی می‌شوند، خواصی که ریاضیدانان و دانشمندان قرن‌ها بر روی آن‌ها مطالعه کرده‌اند. در نیمه اول قرن نوزدهم، فیزیکدان فرانسوی کلود لوئیس ناویر و ریاضیدان ایرلندی الاصل جورج گابریل استوکس به‌طور

مستقل کار می‌کردند. امروزه معادلات تلاطم آب و باد با معادلات ناویر - استوکس که به نام این دو مرد نام‌گذاری‌شده است، به‌صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود. این معادلات از اصول فیزیکی بقای جرم و تکانه مشتق شده‌اند. مشکل اینجاست که ما هنوز نمی‌توانیم آن‌ها را به‌طور صریح حل‌کنیم و نظریه ریاضی اندکی وجود دارد که بتواند ماهیت هر راه‌حلی را توضیح دهد. اگر بتوان در این زمینه پیشرفت کرد، پیش‌بینی آب‌وهوا از یک علم به یک هنر تبدیل می‌شود و سایر کاربردها نیز می توانند از این راه حل سود ببرند. حرکت پیچ‌دار دود و الگوی شعله‌های آتش، ویژگی‌های فیزیکی مشابهی با حرکت تلاطم هوا را نشان می‌دهند که آنها را می‌توان با استفاده از این روش حل معادلات مدل‌سازی کرد. راه حل معادلات ناویر - استوکس یکی از جام‌های مقدس ریاضیات است و یکی از شش چالش باقی‌مانده موسسه Clay است. بینش قابل توجهی در مورد ماهیت معادلات، ارائه یک نظریه جدید و عمیق ریاضی دینامیک سیالات برای دریافت این جایزه مورد نیاز است.

در این راستا، معامله خوبی با روش‌های عددی تقریبی به دست آمده‌است و یک زمینه‌ی کاملاً جدید به نام دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) در این حوزه تحقیقاتی بسیار فعال شده‌است. همراه با CFD، گرافیک کامپیوتری، تجسم جریان‌های آشفته را برای مدل‌سازی، به‌ویژه در طراحی هواپیما و کشتی، امکان‌پذیر کرده‌است. بنابراین، گرافیک کامپیوتری می‌تواند تونل‌های باد فیزیکی را با تونل‌های مجازی جایگزین‌کند و این مزیت‌های عملی قابل‌توجهی را ارائه می‌دهد، به‌عنوان مثال، جریان هوا بر روی بال و جریان آب از کنار بدنه کشتی را می‌توان در زمان واقعی شبیه‌سازی کرد. این بدان معناست که ما می‌توانیم سرعت هواپیما یا کشتی مجازی را تغییر دهیم و تأثیر آنی روی طراحی را ببینیم. این یک انیمیشن ساده نیست، زیرا الگوی جریان مستقیماً از معادلات بدست می‌آید. با پیشرفت سرعت کامپیوترها، این شبیه‌سازی‌ها حتی واقعی‌تر خواهندشد.

آیا P= NP ؟

سؤال مرموز مبنی بر اینکه آیا P برابر با NP است یا خیر؟ این مسئله در جایی قرار دارد که علم کامپیوتر با ریاضیات به یک نقطه‌ی مشترک دیگری می‌رسند



و به‌عنوان بخشی از «نظریه پیچیدگی محاسباتی»، با محدودیت‌هایی در مورد آنچه رایانه‌ها قادر به انجام آن هستند، سروکار دارد. این مسئله هم در فهرست راه‌حل‌ها و شواهد «مطلوب‌ترین» مؤسسه Clay است. این سوال در قرن بیست و یکم حیاتی است، زیرا پیامدهایی برای امنیت رایانه و الگوریتم‌های مورد استفاده در نظریه اعداد دارد. رایانه‌ها فقط می‌توانند با الگوریتم‌ها کار کنند، دنباله‌ای از قوانینی که باید اجرا شوند و در حالی که اجرای برخی از الگوریتم‌ها تنها میکرو ثانیه طول می‌کشد، برخی دیگر با سرعت فعلی میلیاردها قرن طول می‌کشند.

در اینجا کارایی یک الگوریتم، ایده کلیدی است. یک کار آشنا برای کامپیوتر، مرتب‌سازی، قراردادن نام‌ها به‌ترتیب حروف الفبا یا مرتب‌سازی اعداد به ترتیب صعودی است. برای مثال، اگر انسان‌ها مجبور باشند اعداد ۵، ۳، ۴، ۲، ۱ را به ترتیب صحیح مرتب‌کنند، کار نسبتاً ساده‌ای است: ما می‌دانیم که آنها باید به چه ترتیبی باشند. اما یک کامپیوتر چگونه می‌تواند با این سوال مواجه شود؟ یکی از روش‌های مورد استفاده مرتب‌سازی «حبابی» است، الگوریتمی که جفت‌های اعداد مجاور را به روشی سیستماتیک نگاه می‌کند و اگر یکی از دیگری بزرگ‌تر باشد، آنها را با هم عوض می‌کند، یا اگر ترتیب درستی داشته باشند، آنها را به حال خود رها می‌کند.

در گذر اولیه از دنباله اعمال، کامپیوتر ابتدا ۵، ۳ را تعویض می‌کند تا ۳، ۵، ۴، ۲، ۱ را تولید کند. با نگاه‌کردن به جفت دوم، ۵، ۴ را تعویض می‌کند تا ۳، ۴، ۵، ۲، ۱ و بقیه را به‌همین ترتیب انجام می‌دهد. پس از اولین‌گذر متشکل از چهار مقایسه از این قبیل قیاس‌ها نیاز است تاعدد

۵ موقعیت صحیح خود در انتهای دنباله «حباب» بیابد. در گذر بعدی کامپیوتر فقط باید با ۳، ۴، ۲، ۱ سر و کار داشته باشد. در مجموع، کامپیوتر باید ده مقایسه انجام دهد تا دنباله مناسب ترتیب‌یافته را نتیجه بدهد. می‌توانیم این را گسترده‌تر کنیم و بگوییم که اگر n عدد برای مرتب‌سازی داشته باشیم، می‌توانیم تعداد مقایسه‌ها را به همان روش بشماریم. محدودیتی در تعداد مراحل مورد نیاز وجود خواهد داشت، زیرا آن‌ها مطمئناً کمتر از n^2 خواهند بود (همانطور که در مثال ده مقایسه کمتر از ۲۵ = ۵^۲ است). به هر الگوریتمی که تعداد مراحل آن می‌تواند توانی از n باشد، گفته می‌شود که در زمان «چند جمله‌ای» حل‌شود. رایانه‌ها به راحتی می‌توانند مشکلاتی از این دست را حل‌کنند و این الگوریتم‌ها، الگوریتم‌های کارآمدی هستند. حال بیایید در نظر بگیریم که یک کامپیوتر تا چه حد می‌تواند با مسئله معروف «مسئله فروشنده دوره‌گرد» به چالش برخیزد. فرض کنید یک فروشنده بلیط پرواز مسافرتی بخواهد یک بلیط مسافرت را بفروشد، یک داده وجود دارد بهمراه نام همه‌ی شهرها و انواع و اقسام هزینه‌های اصلی و جانبی سفر بین شهرها.

اگر به یک فروشنده مسیری در تمام شهرها داده‌شود، سوال اینجاست که آیا سفر رفت و برگشت ارزان‌تری وجود دارد؟ در این شکل از مسئله، ورودی n شهر است و خروجی یک تصمیم «بله» یا «خیر» خواهدبود. برای یافتن مسیر ارزان‌تر به چند مرحله محاسبه‌ی کامپیوتر نیاز است؟ یک روش brute-force ممکن است تمام مسیرهای ممکن را در نظر بگیرد.

اگر حدود ۱۰۰ شهر و یک ابررایانه آینده‌نگر با قدرت ۱۰^۱۸ عملیات محاسبه در ثانیه را داشته‌باشیم، این روش همچنان به چیزی حدود ۴۰۰۰ قرن برای حل مسئله نیاز دارد. بنابراین، اگر یک الگوریتم کارآمد برای این مشکل وجود داشته‌باشد، فوق‌العاده خواهد بود؛ الگوریتمی که فقط شامل زمان چندجمله‌ای باشد که رایانه‌ها با محاسبات از این دست آشنا هستند. اگر کامپیوتری با کارایی از نوع حباب‌دار وجود داشت، چنین ابررایانه‌هایی مسئله فروشنده دوره‌گرد را در کمتر از یک میکروثانیه حل می‌کردند.

با در نظر گرفتن کارایی، دو دسته مهم از مسائل وجود دارد که باید در نظر گرفت، مسائل P,NP:

P رده مسائلی است که می‌توان آن‌ها را در زمان چند جمله‌ای حل کرد، مانند مسئله مرتب‌سازی.

NP رده‌ای از مسائل است که می‌توان آن‌ها را در زمان چند جمله‌ای تأیید کرد.

مسئله فروشنده دوره‌گرد یکی از این موارد است. اگرچه یافتن راه‌حلی برای مسئله فروشنده دوره‌گرد بسیار چالش برانگیز است، اما محاسبه برای بررسی ارزان‌تربودن مسیر نسبت به مسیر داده‌شده سریع خواهدبود. این تفاوتی است بین دشواری یافتن سوزن در انبار کاه و تأیید اینکه واقعاً آن را پیدا کرده‌اید. هر مسئله‌ای در رده‌ی P در رده‌ی NP قرار می‌گیرد، زیرا یافتن راه‌حل در زمان چندجمله‌ای خود تأیید خودش است. سوال مهم این است:

آیا هر مسئله NP یک مسئله‌ی رده‌ی P است؟
به‌عبارت دیگر، آیا می‌توان یک الگوریتم زمان چند جمله‌ای برای هر مسئله NP پیدا کرد؟
اگر چنین است، P = NP.
از طرف دیگر، اگر بتوانیم یک مسئله NP و اثباتی پیدا کنیم که هیچ الگوریتم کارآمدی برای آن وجود ندارد، بنابراین، P نمی‌تواند برابر NP باشد.

اینجاست که مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد اهمیت پیدا می‌کند. این یک مسئله سخت است و همه مسائل دیگر در کلاس NP می‌توانند به آن تبدیل شوند. اگر بتوانیم یک الگوریتم کارآمد را فقط برای این یک مسئله پیدا کنیم، نتیجه آن این است کهP = NP. پیامد آن نتیجه این خواهد بود که همه مسائل NP را می‌توان به‌طور مؤثر حل‌کرد.

یکی از پیامدهای اثبات موفقیت‌آمیز P = NP این است که می‌توانیم عوامل اول یک عدد بزرگ را توسط یک الگوریتم کامپیوتری کارآمد پیدا کنیم. رمزنگاری مدرن بر اساس دشواری این مسئله است و امنیت تجارت الکترونیک و یکپارچگی شبکه‌های رایانه‌ای را فراهم می‌کند. به عبارت دیگر، اثبات موفقیت‌آمیز به هکرها و سارقان سایبری یک روز میدانی می‌دهد. خوشبختانه بعید به نظر می‌رسد که ماشین‌ها بتوانند همه مسائل را به‌طور مؤثر حل‌کنند و درنتیجه شرایط به نفع P≠ NP است.

آینده ریاضیات

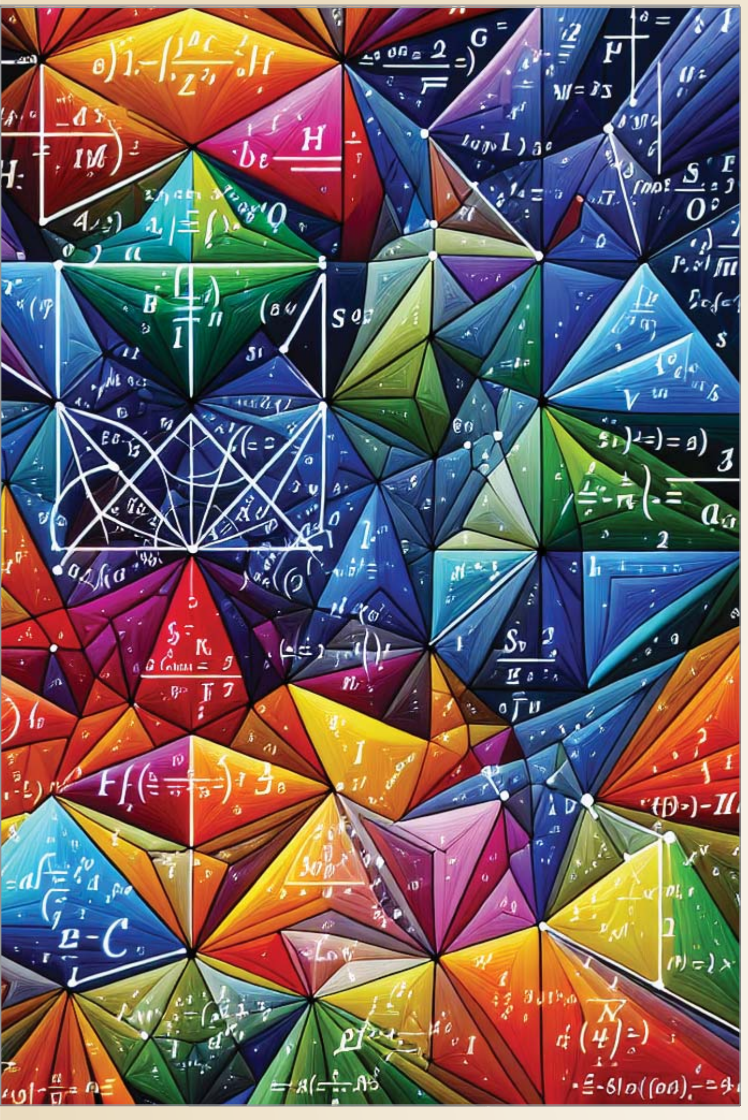
تلاش مستمر برای رام‌کردن این مسائل بزرگ، بدون شک ریاضیدانان را برای سال‌های آینده به خود مشغول خواهد کرد. ممکن است راه‌حل‌ها و اثبات‌ها به‌جای انفجار در یک لحظه، به‌صورت تدریجی پدیدار شوند. این اغلب راهی است که ریاضیات از طریق پالایش و تحلیل سوالات پیشرفت می‌کند. مفاهیم اصلاح می‌شوند، محاسبات هزارتویی گذشته کنار گذاشته می‌شوند، استدلال‌های پنهانی زائد می‌شوند و مسیرهای بسیاری از زمینه‌ها هموار می‌شوند. مانند هر زمینه‌ای از تفکر بشری، روش‌های مد و روندها نیز نقش خود را بازی می‌کنند. آنچه که واضح است، همه حوزه‌های ریاضیات نمی‌توانند زنده بمانند و با بازنویسی نظریه‌ها، زمینه‌های بزرگ تلاش‌ها از بین می‌رود. برخی از آن‌ها در بهترین حالت تبدیل به پاورقی تاریخی می‌شوند.

آیا گذشته نزدیک سرنخ‌هایی از آینده می‌دهد؟ حداقل از یک جهت، پاسخ مطمئناً «بله» است. نیمه دوم قرن بیستم شاهد طلوع عصر کامپیوتر با تأثیر عمیق آن بر ریاضیات و هر چیز دیگری بود. در دهه ۱۹۷۰، اثبات حدس نقشه «چهار رنگ» توسط کامپیوتر نشانه‌ای از همین دوره است. ریاضیدانان امروزی می‌توانند یک قابلیت محاسباتی را بدیهی فرض کنند که حتی تا چند دهه قبل غیرقابل تصور بوده‌است. در حال حاضر، غالباً ریاضیدان یک دانشمند در آزمایشگاه است. ایده‌ها را می‌توان آزمایش‌کرد و آزمایش‌های ریاضی را تحلیل کرد. نه تنها محاسبات حسابی، بلکه جبر را نیز می‌توان بدون مشکل

«رایانه‌ای» کرد، و گرافیک قدرتمند امکان مشاهده طیف وسیعی از اشکال هندسی و سطوح را فراهم می‌کند. ریاضیدانان همیشه مدل‌های فیزیکی ساخته‌اند، اما گرافیک کامپیوتری امروزی این کار را بهتر انجام می‌دهد. با این وجود، باید فرض کنیم که ریاضیدانان فردا، با داشتن منابع محاسباتی پیشرفته‌تر خود، توانایی‌های فعلی ما را ضعیف می‌دانند.

با این‌حال، شکی نیست که عصر ریاضیات در راه است. سی سال پیش، ریاضیات در مهندسی و فیزیک کاربرد داشت. امروز بال‌های خود را در زمینه‌های جدید گشوده‌است و این‌ها به نوبه خود ریاضیات جدیدی را طلب کرده‌اند. واضح است که علوم کامپیوتر به ریاضیات نیاز دارد، اما کمتر قابل پیش‌بینی بود که شیمی، زیست‌شناسی و روانشناسی - فقط سه مثال را نام ببریم - نیز به ورود ریاضی وابسته‌باشند. در واقع، کل رشته ریاضی واقعاً گسترده‌است و به‌ندرت رشته‌ای دست‌نخورده در برخی موارد وجود دارد.

در نتیجه، ریاضیدان حرفه‌ای اکنون نه تنها در یک شاخه از ریاضیات، بلکه در گوشه کوچکی از یک ناحیه از آن شاخه، بسیار متخصص است. این automizek شدن نتیجه اجتناب‌ناپذیر گسترش دانش، تئوری، فناوری و کاربردهای ریاضی است. صدها سال پیش، می‌شد تصور کرد که ریاضیدانان برجسته جهان دور هم جمع‌شوند و آن‌ها به‌صورت متحرک (فرض کنیم یک زبان مشترک) و با درک متقابل و در افق‌های فکری یکسان صحبت کنند. یک تمرین مشابه امروز



ممکن است گروهی از افراد را ایجاد کند که عمیقاً در تخصص خود مسلط هستند، اما تا حد زیادی از آنچه همکاران‌شان انجام می‌دهند دچار مشکل هستند. این شاید بهای پیشرفت باشد.

آینده کجاست؟ اساساً، آینده همان جایی است که همیشه وجود داشته‌است: با یک ذهن کنجکاو، یک مداد و یک دفترچه یادداشت (و شاید اکنون یک رایانه). و با اشتها و اشتیاق برای حل مسائل هنوز حل‌نشده. هنوز کارهای زیادی برای انجام‌دادن وجود دارد.